

Propagation d'un signal

2

Les signaux envisagés dans ce chapitre sont des **ondes**. Ces signaux ne sont pas sinusoïdaux dans la majorité des cas, mais ils s'interprètent comme la superposition de signaux sinusoïdaux et peuvent être représentés par un **spectre**.

Une onde est modélisée par une fonction du temps et d'une variable spatiale. La **propagation** de l'onde se traduit par une forme mathématique particulière de cette fonction. On étudiera le cas des **ondes sinusoïdales** qui sont périodiques dans le temps et dans l'espace.

1 Signaux physiques, spectre

1.1 Ondes et signaux physiques

On appelle **onde** un phénomène physique dans lequel une perturbation locale se déplace dans l'espace sans qu'il y ait de déplacement de matière en moyenne. Toute grandeur physique, nulle dans l'état de repos et apparaissant avec la perturbation, est appelée **signal physique** transporté par l'onde.

On peut citer quelques exemples d'ondes :

1. Tout le monde connaît les « ronds dans l'eau » générés à la surface de l'eau par une action locale comme l'impact d'un projectile : le signal physique est le déplacement vertical de la surface de l'eau. Les particules d'eau ont un mouvement vertical « sur place » et elles retrouvent leur position initiale après le passage de l'onde de sorte que le phénomène n'entraîne aucun déplacement global de l'eau. Le mot onde vient du latin *unda* qui signifie eau.
2. Il existe des **ondes élastiques** se propageant dans les milieux solides. Le signal transporté par ces ondes est une déformation locale et réversible de la matière. L'onde est qualifiée de :
 - **transversale** lorsque le mouvement local de la matière est perpendiculaire à la direction dans laquelle l'onde se propage ;
 - **longitudinale** lorsque le mouvement local de la matière est parallèle à la direction dans laquelle l'onde se propage.

On peut propager des ondes transversales le long d’une corde, des ondes longitudinales ou transversales le long d’un ressort à boudin. Parmi les **ondes sismiques** se propageant dans la croûte terrestre, il y a des ondes longitudinales (ondes *P* qui, lors d’un tremblement de terre, arrivent en premier) et des ondes transversales (ondes *S* qui arrivent en second).

3. Les **ondes acoustiques** se propagent dans tous les milieux matériels, solides ou fluides. Dans un solide il s’agit d’ondes élastiques longitudinales. Dans un fluide, la perturbation est une modification très faible de la pression due à un mouvement longitudinal imperceptible des couches de fluide. Les signaux transportés par l’onde acoustique sont la variation de pression par rapport à l’état de repos, appelée surpression acoustique, et la vitesse de vibration. Les microphones sont sensibles à l’un ou l’autre de ces signaux.
4. À la différence des exemples précédents, les **ondes électromagnétiques** n’ont pas besoin de milieu matériel pour se propager : elles traversent par exemple l’espace vide entre une galaxie lointaine et la Terre. Les deux grandeurs physiques associées à ces ondes sont un champ électrique et un champ magnétique. La lumière est une onde électromagnétique.

Ces ondes peuvent être guidées, par exemple le long d’un câble de transmission constitué par deux conducteurs. Dans ce cas, on peut associer à l’onde deux signaux électriques : la tension entre les deux conducteurs et l’intensité passant à travers leurs sections (dans des sens opposés). On peut parler alors d’« onde de courant » le long du câble.

5. La théorie de la relativité générale prédit l’existence d’**ondes gravitationnelles**. Ces ondes se déplacent dans l’espace sans support matériel. Le signal est une déformation de l’espace induisant des variations des longueurs. Ces ondes n’ont encore jamais été détectées directement.

| Type d’onde | Milieu de propagation | Signaux physiques |
|--------------------------|-----------------------|---|
| Ondes élastiques | solide | déplacement transversal ou longitudinal |
| Ondes sonores | fluide | surpression acoustique, vitesse (longitudinale) |
| Ondes électromagnétiques | vide | champ électrique, champ magnétique |
| Ondes de courant | câble de transmission | tension électrique, intensité électrique |
| Ondes gravitationnelles | vide | déformation de l’espace |

Tableau 2.1 – Quelques ondes et les signaux associés.

1.2 Notion de spectre

Le signal d’une onde n’est pas, en général, sinusoïdal. Cependant, une théorie mathématique due à Joseph Fourier, mathématicien et physicien du début du *XIX*^{ème} siècle, montre que tout signal réalisable en pratique peut être décomposé en **somme de signaux sinusoïdaux**.

a) Analyse spectrale

L'opération qui consiste à déterminer les signaux sinusoïdaux composant un signal donné est appelée **analyse spectrale**. Le résultat de l'analyse spectrale est :

- la liste des fréquences f_i des composantes sinusoïdales contenues dans le signal,
- l'amplitude A_i de chaque composante sinusoïdale de fréquence f_i ,
- la phase initiale φ_i de chaque composante sinusoïdale de fréquence f_i .

Elle permet de savoir que le signal s'écrit :

$$s(t) = \sum_i A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i). \quad (2.1)$$

Chaque signal sinusoïdal $s_i(t) = A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i)$ est une **composante sinusoïdale** du signal $s(t)$. On dit que le signal $s(t)$ « contient les fréquences f_i ». Le **spectre du signal** est l'ensemble des fréquences contenues dans le signal.

b) Représentation graphique du spectre

La représentation graphique des A_i en fonction des f_i constitue le **spectre d'amplitude**. Elle permet de visualiser le contenu fréquentiel du signal.

On préfère parfois représenter les carrés des amplitudes A_i^2 en fonction des fréquences f_i pour visualiser la contribution de chaque composante à l'énergie du signal, c'est le **spectre d'énergie**.

La représentation des phases initiales φ_i en fonction des f_i est le **spectre de phase**. Ce spectre est plus difficilement interprétable car les phases initiales, à la différence des amplitudes, dépendent du choix de l'origine des temps qui est arbitraire.

Exemple

Le signal $s(t) = 3 \cos(30\pi t + \frac{\pi}{3}) + 4 \cos(100\pi t)$ contient les fréquences $f_1 = 15$ Hz et $f_2 = 50$ Hz. Son spectre, d'amplitude et de phase, est représenté sur la figure 2.1.

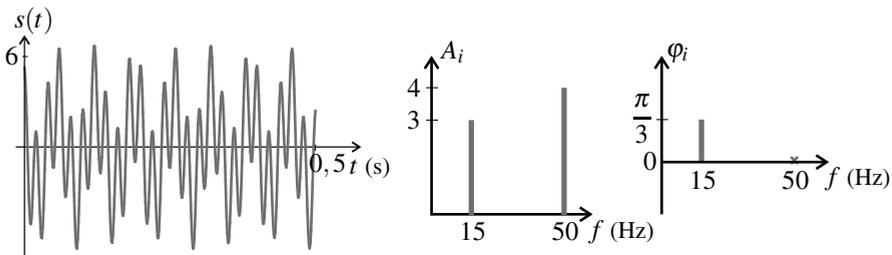


Figure 2.1 – Signal $s_1(t)$ et son spectre : amplitudes et phases initiales.

On remarque que le chronogramme (courbe $s(t)$ en fonction de t) est difficile à interpréter. Le spectre donne une information bien plus lisible.

c) Synthèse de Fourier

Toute l'information que l'on peut avoir sur un signal est contenue dans les spectres d'amplitude (ou énergie) et de phase. L'opération consistant à reconstituer un signal $s(t)$ dont on connaît le spectre (fréquences f_i , amplitudes A_i et phases initiales φ_i) par la formule 2.1 est appelée **synthèse de Fourier**.

1.3 Cas d'un signal périodique de forme quelconque

Dans ce paragraphe on s'intéresse à un signal périodique dont on note T_S la période et $f_S = \frac{1}{T_S}$ la fréquence. Il s'agit d'un signal de forme quelconque, *a priori* non sinusoïdal.

a) Analyse spectrale d'un signal périodique

Un théorème mathématique important découvert au début du XIX^{ème} siècle par le mathématicien et physicien français Joseph Fourier indique que :

Tout signal périodique de fréquence f_S et de forme quelconque peut se reconstituer par la superposition de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de f_S : $0, f_S, 2f_S, \dots, nf_S, \dots$. Il peut donc s'écrire sous la forme :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi_n), \tag{2.2}$$

où les A_n sont des constantes positives et les φ_n des constantes.

La somme infinie de la formule (2.2) est le **développement en série de Fourier** du signal $s(t)$. Les formules permettant de trouver les amplitudes A_n et les phases initiales φ_n des composantes sinusoïdales du signal ne sont pas au programme.

L'usage a consacré des noms pour les différents termes qui apparaissent dans la série de Fourier :

- A_0 est appelée **composante continue**, c'est la moyenne du signal qui est la plupart du temps nulle dans le cas d'une onde ;
- la composante sinusoïdale $A_1 \cos(2\pi f_S t + \varphi_1)$ qui a la même fréquence f_S que le signal $s(t)$ est appelée **fondamental** ;
- la composante sinusoïdale $A_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi_n)$, qui a une fréquence n fois plus élevée que la fréquence du signal, avec $n \geq 2$, est appelée **harmonique de rang n** .

Ainsi le spectre d'un signal périodique a l'allure représentée sur la figure 2.2.

Remarque

Le spectre d'un signal sinusoïdal ne comporte qu'un fondamental.

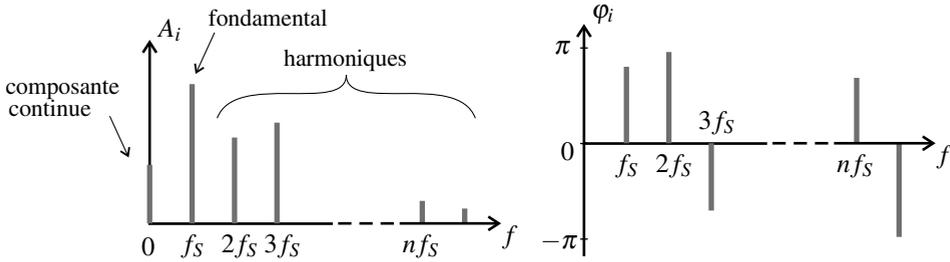


Figure 2.2 – Spectre d'un signal périodique $s(t)$: amplitude et phase initiale.

b) Exemple de synthèse de Fourier d'un signal périodique (MPSI)

On considère le signal représenté sur la figure 2.3, de période T_S . En définissant un temps adimensionnel $t^* = \frac{t}{T_S}$, on peut écrire ce signal : $s(t) = 0,625(t^* - 0,4)$ si $0 \leq t^* \leq 0,8$ et $s(t) = 2,5(t^* - 0,9)$ si $0,8 \leq t^* \leq 1$.

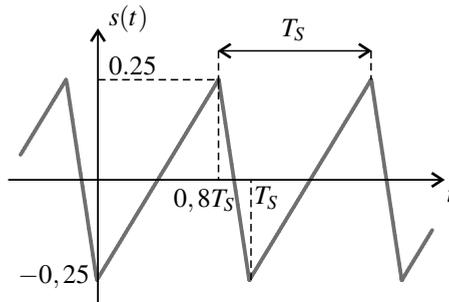


Figure 2.3 – Exemple de signal périodique non sinusoïdal de période T_S .

Les amplitudes et phases initiales des composantes sinusoïdales de ce signal sont facilement calculables et on trouve :

$$A_n = \frac{1}{\pi n^2} |\sin(0,8\pi n)| \quad \text{et} \quad \varphi_n = (-0,5 - 0,2r)\pi,$$

où r est le reste de la division de n par 5. Ce spectre est représenté sur la figure 2.4.

On peut tester la synthèse de Fourier en calculant et représentant les sommes partielles :

$$S_n(t) = \sum_{i=1}^n A_n \cos(2\pi t^* - \varphi_n).$$

Les résultats sont donnés sur la figure 2.5. On voit le signal se construire petit à petit à partir de son fondamental et de ses harmoniques de rang de plus en plus élevé. La somme S_3 limitée

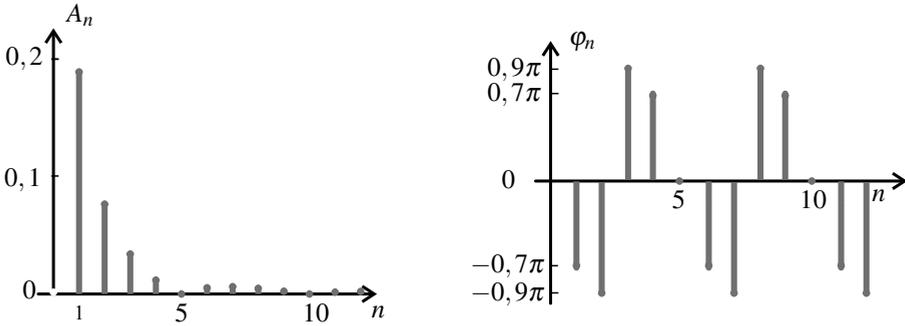


Figure 2.4 – Spectre du signal $s(t)$ défini dans le texte : amplitudes et phases initiales (ramenées entre $-\pi$ et π).

aux harmoniques d'ordre inférieur ou égal à 3 a déjà l'allure globale du signal ; la somme S_{10} est pratiquement égale au signal et on ne peut pas distinguer à l'œil la somme S_{100} du signal. Ce procédé peut s'appliquer, après détermination du spectre, à un signal physique réel.

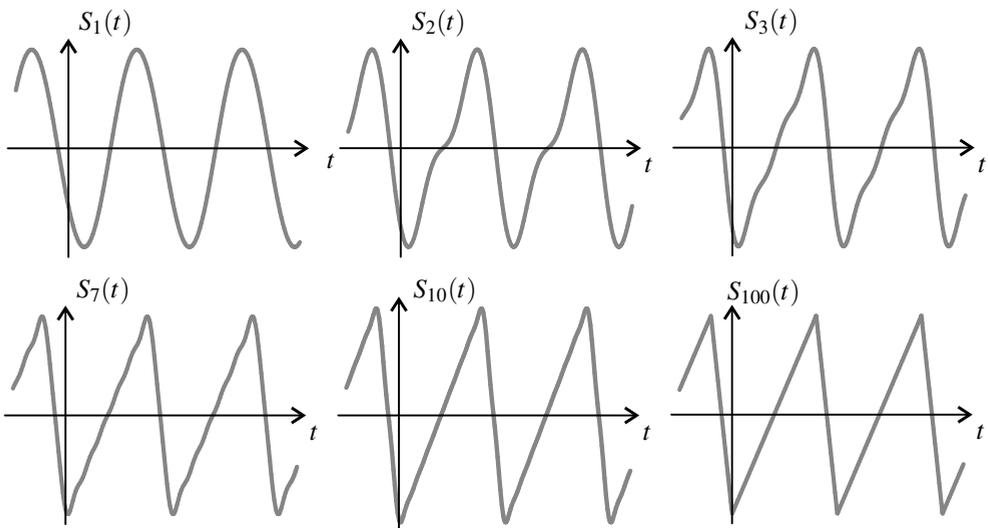


Figure 2.5 – Sommes partielles de Fourier $S_n(t)$ pour $n = 1, 2, 3, 7, 10$ et 100 .

1.4 Cas d'un signal non périodique

a) Spectre continu

La théorie de la **transformée de Fourier** montre qu'il est possible de reconstituer tout signal physique, même non périodique, par superposition de signaux sinusoïdaux. La différence avec le cas des signaux périodiques est que les fréquences f (et pulsation $\omega = 2\pi f$) des composante sinusoïdales prennent *a priori* toutes les valeurs de 0 à l'infini.

La décomposition d'un signal non périodique s'écrit sous la forme :

$$s(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega.$$

$A(\omega)$ est la densité spectrale d'amplitude qui a la dimension du signal $s(t)$ divisée par l'unité de pulsation, c'est-à-dire multipliée par des secondes.

Le spectre du signal est l'ensemble des fréquences pour lesquelles la densité spectrale $A(\omega)$ est non nulle. Il comporte un continuum de fréquences entre une fréquence minimale et une fréquence maximale, d'où le nom de **spectre continu**.

L'information complète concernant le signal est donnée par deux courbes :

- le spectre d'amplitude : courbe de $A(\omega)$ en fonction de ω ;
- le spectre de phase initiale : courbe $\varphi(\omega)$ en fonction de ω .

b) Étude d'un exemple

Dans le cas du signal $s(t) = \exp(-at^2) \cos(2\pi t)$ un calcul en dehors du programme montre que $A(\omega) = 2\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cosh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 + \omega^2}{4a}\right)$ et $\varphi(\omega) = 0$. La figure 2.6 montre ce signal et son spectre d'amplitude pour deux valeurs différentes de a .

Dans les deux cas la courbe d'amplitude est maximale pour $\omega_0 = 2\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ qui est la pulsation du cosinus apparaissant dans l'expression du signal. Lorsque a diminue, le signal occupe une plage de temps plus grande et le spectre se resserre autour de ω_0 . Si on faisait tendre a vers 0, le signal deviendrait un signal purement sinusoïdal et son spectre un pic de largeur nulle en ω_0 . Ceci est général : plus un signal est court, plus son spectre est large.

Des exemples de spectres continus réels sont donnés dans la suite de ce chapitre (voir figures 2.8 et 2.9), ainsi que dans le chapitre 4.

1.5 Analyse harmonique expérimentale

La plupart des oscilloscopes numériques et des logiciels de traitement des données expérimentales sont pourvus d'un module d'analyse de Fourier permettant d'obtenir le spectre d'un signal physique.

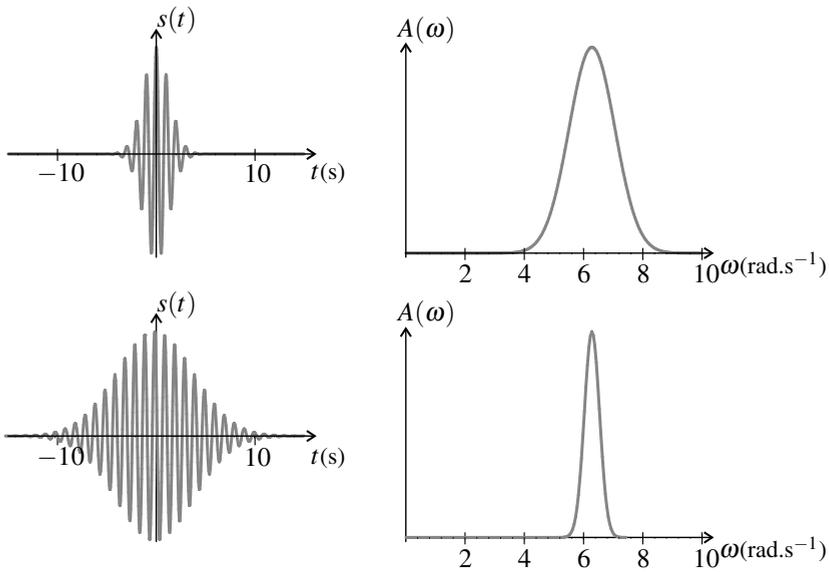


Figure 2.6 – Signal $s(t) = \exp(-at^2) \cos(2\pi t)$ et son spectre d'amplitude pour deux valeurs de a : en haut $a = 0,3$, en bas $a = 0,033$.

a) Obtention du spectre d'un signal périodique

Dans le cas d'un signal périodique, pour obtenir un spectre exact, il est nécessaire de faire les calculs sur un **échantillon de signal correspondant à un nombre entier de périodes**.

Les logiciels sont munis d'un système de « sélection de périodes » pouvant fonctionner soit de manière manuelle soit de manière automatique (si le signal est propre).

Sur certains oscilloscopes, le calcul du spectre porte sur la portion de signal visible à l'écran. Si l'appareil est réglé de manière à ce qu'on voie la forme du signal sur un petit nombre de périodes le spectre a une mauvaise résolution. Pour avoir une bonne résolution en fréquence il faut augmenter la base de temps et voir des oscillations très serrées.

b) Obtention d'un spectre continu

Dans le cas d'un signal non périodique, on cherche à déterminer un spectre continu. Pour avoir la meilleure résolution en fréquence, il faut utiliser un échantillon aussi long que possible de signal, tout en préservant un pas d'échantillonnage δt suffisamment petit pour avoir une large gamme de fréquences.

c) Utilisation d'une fenêtre

Le calcul de spectre génère des erreurs lorsque le signal n'a pas la même valeur à l'instant t_{initial} et à l'instant t_{final} . Pour éviter cela on peut le multiplier par une fonction appelée *fenêtre* nulle (ou presque nulle) aux deux bornes de l'intervalle de temps.

Les logiciels proposent de nombreuses fenêtres parmi lesquelles :

- la fenêtre rectangulaire qui vaut 1 sur l'intervalle d'échantillonnage (ce qui revient à ne pas utiliser de fenêtre) ;
- la fenêtre de *Hamming* qui donne une bonne résolution sur la position des pics mais des valeurs des amplitudes peu fiables ;
- la fenêtre *Flattop* qui préserve la valeur des amplitudes des pics mais ne permet pas une lecture précise de leurs positions sur l'axe des fréquences.

1.6 Exemple : analyse de signaux sonores

Dans ce paragraphe on s'intéresse à des signaux sonores. Le mot « harmonique » désignant une composante sinusoïdale d'un signal périodique provient du vocabulaire musical.

a) Ordre de grandeur des fréquences sonores

Le **domaine audible**, intervalle des fréquences f_{son} perçues par l'oreille humaine, s'étend de 20 Hz à 20 kHz.

C'est l'intervalle des fréquences perçues par un individu « moyen ». En fait, l'intervalle des fréquences perçues est très variable suivant l'individu et il se rétrécit avec l'âge à partir de 20 ans. Une exposition fréquence à des sons très intenses tend à accélérer ce processus.

b) Exemples de spectres de sons

Expérience

On peut facilement analyser un son en utilisant un micro de bonne qualité et un ordinateur muni d'une carte son et d'un logiciel de traitement du son.

La figure 2.7 montre le signal (tension électrique) fourni par une guitare électrique et destiné à être envoyé sur un amplificateur. Le signal est périodique et le spectre a été calculé sur 20 périodes. On observe le fondamental à $f_s = 178$ Hz (il s'agit d'un Fa3), une harmonique 2 très prononcée et des harmoniques 3, 6 et 7.

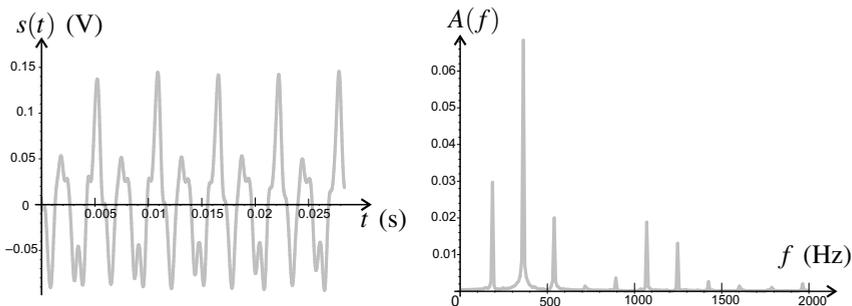


Figure 2.7 – Le son d'une guitare électrique jouant un Fa3 et son spectre en amplitude obtenu avec un calcul sur 20 périodes.

La figure 2.8 montre le signal délivré par un micro captant le son d'un battement unique de tambour. Le spectre été calculé sur la totalité du son qui dure un peu plus d'un dixième de seconde. On observe un spectre continu. Le maximum d'amplitude est à 176 Hz. On repère aussi des pics à 546 Hz et 899 Hz. S'agit-il d'harmoniques ? On a $\frac{546}{176} = 3,1$ et $\frac{899}{176} = 5,1$. Ces fréquences, proches de multiples entiers de la fréquence la plus importante dans le signal sont appelés partiels.

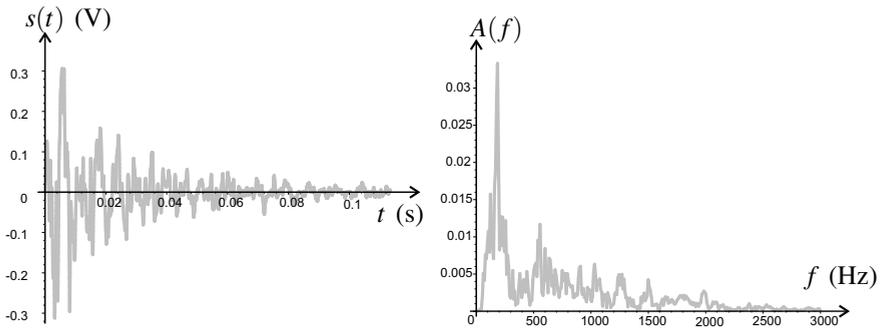


Figure 2.8 – Le son d'un tambour et son spectre en amplitude.

La figure 2.9 représente le signal (tension électrique) fournit par un micro captant le son d'une feuille de papier que l'on froisse. Le spectre a été calculé sur un échantillon durant 1,5 s. C'est un spectre continu qui contient toutes les fréquences entre 400 Hz environ et 7 kHz.

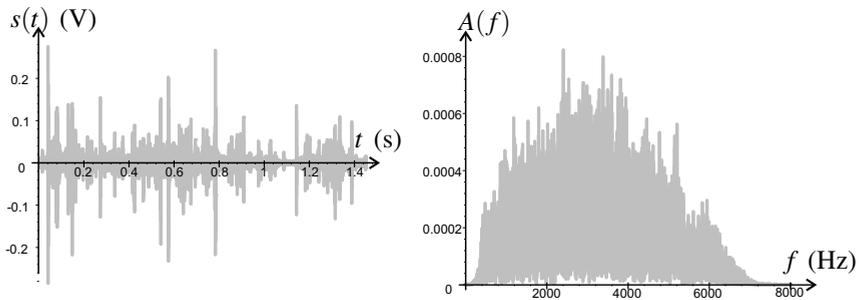


Figure 2.9 – Le son d'une feuille de papier qu'on froisse et son spectre en amplitude.

2 Phénomène de propagation

La deuxième partie de ce chapitre est consacré à la propagation des ondes. Après avoir introduit le modèle de l'onde progressive, on étudiera le modèle de l'onde progressive sinusoïdale.

2.1 Observations expérimentales

a) Onde à la surface de l'eau

Lorsqu'on jette une pierre dans un étang, on observe à la surface de l'eau des rides circulaires, les « ronds dans l'eau ». La perturbation engendrée par la pierre se transmet de proche en proche à des points de plus en plus éloignés du lieu de l'impact. Si l'on filme le phénomène, en se plaçant à la verticale du point d'impact, on peut mesurer, à différents instants t_1, t_2, \dots, t_n , le rayon d'un « rond » donné, les valeurs successives R_1, R_2, \dots, R_n sont bien représentées par une loi de la forme : $R_i = R_0 + vt_i$, où v est une constante homogène à une vitesse. v est la vitesse de propagation de l'ébranlement à la surface de l'eau qui se déplace entre les instants t_i et t_{i+1} sur une distance $R_{i+1} - R_i = v(t_{i+1} - t_i)$.

b) Onde sonore

Expérience

L'expérience suivante met en évidence la phénomène de propagation du son.

On dispose deux micros à distance d l'un de l'autre de manière à ce qu'une onde sonore puisse parvenir à chacun d'entre eux sans que l'autre ne lui fasse obstacle. Les signaux délivrés par les micros sont envoyés sur les deux voies d'un oscilloscope numérique réglé en « monocoup » ou une carte d'acquisition pour microordinateur.

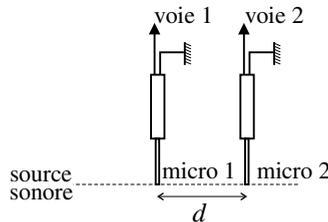


Figure 2.10 – Mesure de la vitesse de propagation du son dans l'air.

La source sonore doit produire un son sec et bref. Le document ci-dessous correspond à un claquement de doigts.

Le déclenchement de l'acquisition est provoqué par le signal du micro 1 utilisé comme « source de déclenchement » : elle commence à l'instant où ce signal atteint une valeur que l'on choisit. Cette valeur doit être ni trop basse (pour qu'un signal parasite ne déclenche pas l'acquisition), ni trop élevée (pour que le signal soit suffisamment fort pour la déclencher).

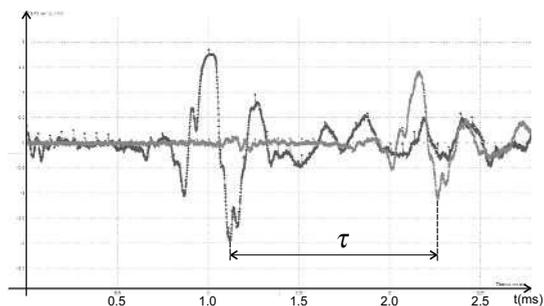


Figure 2.11 – Signaux détectés par les deux micros : le micro 1 reçoit en premier le signal, le micro 2 le reçoit avec un retard τ et une certaine atténuation.

L'enregistrement de la figure 2.11 a été fait avec une distance $d = 40 \text{ cm} \pm 1 \text{ mm}$ entre les micros. On observe que le signal donné par le micro 2 reproduit celui donné par le micro 1, avec une atténuation et un retard $\tau = 1,152 \text{ ms} \pm 0,004 \text{ ms}$.

On interprète cette expérience en considérant que le signal sonore se déplace à la vitesse c_{son} . Il atteint donc le micro 2 après le micro 1, avec un retard : $\tau = \frac{d}{c_{\text{son}}}$.

On en déduit :

$$c_{\text{son}} = \frac{d}{\tau} = \frac{0.40}{1,125 \cdot 10^{-3}} = 347 \pm 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2.2 Onde progressive

a) Vitesse de propagation ou célérité

Les deux situations précédentes illustrent le phénomène de **propagation**. Dans les deux, un signal physique (ébranlement de l'eau, suppression de l'onde sonore) créé en un point de l'espace, se transmet de proche en proche dans la matière (l'eau, l'air) et peut être ainsi observé à distance de l'endroit où il a été produit, et ceci sans qu'il y ait de déplacement de matière entre le point où le signal est produit et celui où il est mesuré.

La vitesse de déplacement du signal est appelée **vitesse de propagation** ou encore **célérité**. Dans la suite on la notera c .

Pour modéliser le phénomène de propagation, on introduit dans ce paragraphe l'**onde progressive à une dimension**, qui se propage sans atténuation ni déformation à la vitesse constante c dans la direction d'un axe (Ox) . Cette onde est représentée mathématiquement par une fonction $s(x, t)$ de deux variables : la coordonnée x selon l'axe (Ox) et le temps t . $s(x, t)$ est la valeur du signal, mesurée à l'abscisse x , à l'instant t .

On considérera le cas où l'onde progresse dans le sens positif de (Ox) et le cas où elle progresse dans le sens négatif de (Ox) .

b) Première expression de l'onde progressive

On considère une onde progressive, se propageant avec la célérité c dans la direction de l'axe (Ox) et dans le sens positif de cet axe, c'est-à-dire vers les x croissants. La figure 2.12 représente le signal mesuré à une abscisse x_0 , en fonction du temps, ainsi que le signal mesuré à une abscisse $x_1 > x_0$.

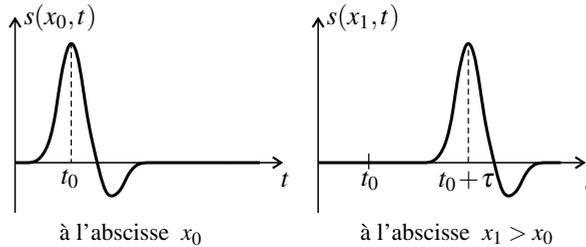


Figure 2.12 – Onde se propageant sans atténuation ni déformation dans le sens positif de (Ox) , en deux points différents.

Les valeurs observées en x_0 au cours du temps sont observées aussi en x_1 , mais avec un retard τ . Ceci s'écrit :

$$s(x_1, t) = s(x_0, t - \tau).$$

La durée τ est celle qu'il faut à l'onde pour se propager de x_0 à x_1 . La vitesse de propagation étant c on a :

$$\tau = \frac{x_1 - x_0}{c}$$

Il vient donc :

$$s(x_1, t) = s\left(x_0, t - \frac{x_1 - x_0}{c}\right). \quad (2.3)$$

On peut remarquer que la formule (2.3) est valable aussi quand $x_1 < x_0$. Elle s'écrit en effet : $s(x_1, t) = s\left(x_0, t + \frac{x_0 - x_1}{c}\right)$ et signifie alors que l'on trouve en x_1 le même signal qu'en x_0 avec une *avance* $\frac{x_0 - x_1}{c}$.

Si on écrit la formule (2.3) en posant $x_0 = 0$ et $x_1 = x$, valeur quelconque, on trouve :

$$s(x, t) = s\left(0, t - \frac{x}{c}\right).$$

Le membre de droite de cette équation est simplement une fonction d'une seule variable, $t - \frac{x}{c}$. Pour simplifier l'écriture on le note $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$.

Une **onde progressive** se propageant à la vitesse c dans la direction de l’axe (Ox) , dans le sens positif de cet axe, sans atténuation ni déformation, est de la forme mathématique suivante :

$$s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

où f est une fonction quelconque dont l’argument a la dimension d’un temps.

On peut s’intéresser aussi à une onde se propageant dans la direction de l’axe (Ox) mais cette fois dans le sens négatif de cet axe, c’est-à-dire vers les x décroissants. Ce cas se ramène au cas précédent si l’on définit un axe (Ox') tel que $x' = -x$. Il suffit donc de changer x en $-x$ dans le résultat. Ainsi :

Une **onde progressive** se propageant à la vitesse c dans la direction de l’axe (Ox) , dans le sens négatif de cet axe, sans atténuation ni déformation, est de la forme mathématique suivante :

$$s(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

où g est une fonction quelconque dont l’argument a la dimension d’un temps.

c) Deuxième expression de l’onde progressive

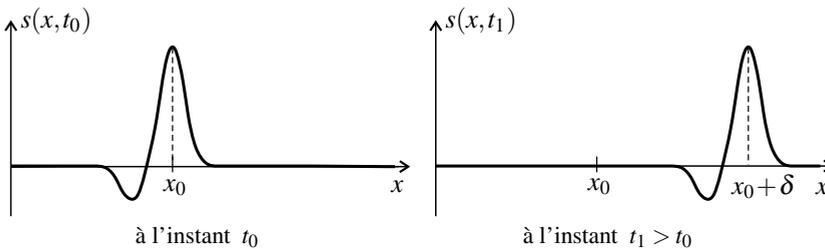


Figure 2.13 – Onde se propageant sans atténuation ni déformation dans le sens positif de (Ox) , à deux instants différents.

La figure 2.13 représente les valeurs du signal à deux instants différents t_0 et $t_1 > t_0$ pour la même onde que sur la figure 2.12.

Entre les instants t_0 et t_1 , l’onde qui progresse dans le sens positif de l’axe (Ox) se déplace d’une distance δ . Ainsi la valeur observée à l’instant t_0 en x est observée à l’instant t_1 en $x + \delta$:

$$s(x, t_0) = s(x + \delta, t_1).$$

L’onde se propage à la vitesse c donc on a :

$$\delta = c(t_1 - t_0).$$

Il vient ainsi :

$$s(x, t_0) = s(x + c(t_1 - t_0), t_1). \tag{2.4}$$

De même que plus haut, on peut se convaincre facilement que la formule (2.4) est valable aussi si $t_1 < t_0$. Si on l'écrit en posant $t_0 = t$, instant quelconque, et $t_1 = 0$ elle devient alors :

$$s(x, t) = s(x - ct, 0).$$

Le membre de droite de cette équation est simplement une fonction d'une seule variable, $x - ct$. Pour simplifier l'écriture on le note $F(x - ct)$. Ainsi :

Une **onde progressive** se propageant à la vitesse c dans la direction de l'axe (Ox) , *dans le sens positif* de cet axe, sans atténuation ni déformation, est de la forme mathématique suivante :

$$s(x, t) = F(x - ct),$$

où F est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'une longueur.

Si l'on s'intéresse aussi à une onde se propageant le long de l'axe (Ox) dans le sens négatif de cet axe, c'est-à-dire le sens des x décroissants, le même raisonnement s'applique si l'on prend un axe (Ox') tel que $x' = -x$. Il suffit donc de changer x en $-x$ dans le résultat. On obtient une fonction de la variable $-x - ct$ que l'on peut changer, pour avoir une notation plus simple, pour son opposé $x + ct$. Ainsi :

Une **onde progressive** se propageant à la vitesse c dans la direction de l'axe (Ox) , *dans le sens négatif* de cet axe, sans atténuation ni déformation, est de la forme mathématique suivante :

$$s(x, t) = G(x + ct),$$

où G est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'une longueur.

d) Équivalence des deux expressions

Comme on vient de le montrer, une onde se propageant dans le sens positif de l'axe (Ox) peut s'écrire de deux manières :

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = F(x - ct).$$

Si l'on connaît la fonction f on trouve la fonction F en posant $t = 0$ dans l'équation ci-dessus :

$$F(x) = f\left(-\frac{x}{c}\right),$$

et si l'on connaît la fonction F , on trouve la fonction f en posant $x = 0$ dans cette équation :

$$f(t) = F(-ct).$$

Dans le cas d'une onde se propageant dans le sens négatif de l'axe (Ox) , on obtient la même onde avec les deux formules $g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ et $G(x + ct)$ si :

$$G(x) = g\left(\frac{x}{c}\right) \quad \text{soit} \quad g(t) = G(ct).$$

2.3 Onde progressive sinusoïdale

Dans ce paragraphe on considère une onde progressive se propageant *dans le sens positif de l'axe* (Ox), sans déformation ni atténuation. Cette onde aura une forme particulière : elle sera sinusoïdale.

a) Définition

On parle d'**onde sinusoïdale**, ou encore d'**onde harmonique**, lorsque le signal mesuré en tout point est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω , indépendante du point. Une telle onde a la forme mathématique suivante :

$$s(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \varphi(x)).$$

$A(x)$ est l'amplitude de l'onde au point d'abscisse x et $\varphi(x)$ la phase initiale de l'onde en ce même point.

On note : $A_0 = A(0)$ et $\varphi(0) = \varphi_0$, l'amplitude et la phase initiale à l'origine O de l'axe Ox .

b) Double périodicité spatio-temporelle

L'onde se propageant sans atténuation ni déformation dans le sens positif de (Ox), la vibration observée à toute abscisse $x > 0$ reproduit la vibration observée en $x = 0$ avec le retard de propagation $\tau = \frac{x}{c}$. Ceci s'exprime ainsi :

$$s(x, t) = s(0, t - \tau) = A_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right).$$

On retiendra ce résultat sous la forme suivante :

Une **onde progressive sinusoïdale** de pulsation ω se propageant dans le sens positif de l'axe (Ox) avec la vitesse c a pour expression :

$$s(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (2.5)$$

k est appelé **vecteur d'onde**. A_0 est l'**amplitude** de l'onde et φ_0 sa **phase initiale à l'origine**.

Ainsi l'onde progressive sinusoïdale est une fonction sinusoïdale à la fois :

- du temps (pour x fixé) avec une pulsation temporelle ω ,
- de la variable spatiale x (pour t fixé), avec une pulsation spatiale k .

On parle de la **double périodicité spatio-temporelle** de l'onde.

De même que la période temporelle est : $T = \frac{2\pi}{\omega}$, la période spatiale est la **longueur d'onde** :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = cT.$$

La fréquence spatiale est le **nombre d'onde** :

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}.$$

Une onde progressive sinusoïdale se propageant dans le sens positif de l'axe (Ox) peut s'écrire :

$$s(x,t) = A_0 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right) \quad (2.6)$$

où T est la période temporelle et λ la période spatiale appelée **longueur d'onde**.

La longueur d'onde est égale à la distance sur laquelle l'onde se propage pendant une durée égale à la période temporelle T :

$$\lambda = cT. \quad (2.7)$$

On peut trouver toutes les grandeurs relatives à la périodicité spatio-temporelle quand on connaît l'une d'entre elles et la vitesse de propagation c . Si on connaît la période temporelle T alors :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad f = \frac{1}{T}, \quad \lambda = cT \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{1}{cT}.$$

Si on connaît la fréquence f :

$$\omega = 2\pi f, \quad T = \frac{1}{f}, \quad \lambda = \frac{c}{f} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{f}{c}.$$

Si on connaît la longueur d'onde λ :

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}, \quad T = \frac{\lambda}{c}, \quad f = \frac{c}{\lambda}, \quad \text{et} \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}.$$

Les grandeurs relatives à la double périodicité spatio-temporelle de l'onde progressive sinusoïdale sont rassemblées dans le tableau suivant :

| | Période | Fréquence | Pulsation |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| Temps | T | f | ω |
| Espace | λ | σ | k |

Tableau 2.2 – Grandeurs caractérisant la double périodicité de l'onde progressive sinusoïdale.

c) Interprétation physique

Le lien entre les périodes temporelle T et spatiale λ exprimé dans la formule (2.7) se retrouve par le raisonnement suivant.

Comme on le voit sur la figure 2.14, la courbe représentant l'onde en fonction de x à l'instant t_1 est la courbe à l'instant $t_0 < t_1$ décalée vers la droite de $\delta = c(t_1 - t_0)$. Ceci fait qu'en chaque point la valeur de l'onde change entre t_0 et t_1 . Si on suppose maintenant que $t_1 = t_0 + T$ l'onde a les mêmes valeurs à t_0 et à t_1 . Il faut pour cela que la courbe soit décalée d'une période spatiale soit $\delta = \lambda$. Ainsi : $\lambda = c(t_1 - t_0) = cT$.

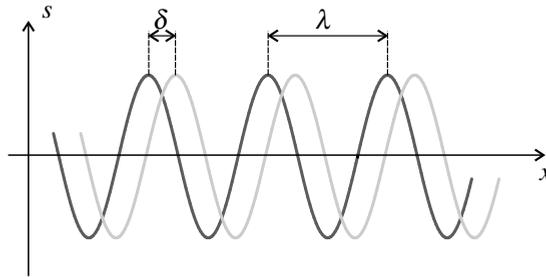


Figure 2.14 – Onde sinusoïdale se propageant dans le sens positif de (Ox) à deux instants t_0 (en gris foncé) et $t_1 > t_0$ (en gris clair). Le décalage des courbes est $\delta = c(t_1 - t_0)$.

d) Déphasage entre les vibrations en deux points

La phase initiale de la vibration à l'abscisse x est, d'après l'équation (2.5) :

$$\varphi(x) = \varphi_0 - kx = \varphi_0 - \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Les signaux d'une onde sinusoïdale se propageant dans le sens positif de (Ox) en deux points d'abscisses x_1 et x_0 sont déphasés de :

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_0) = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_0).$$

Remarque

Ce résultat se retrouve très facilement. Si $x_1 > x_0$, la vibration en x_1 est en retard sur celle en x_0 de $\tau = \frac{x_1 - x_0}{c}$. Le retard temporel se traduit par un retard de phase :

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_0) = -2\pi \frac{\tau}{T} = -\frac{2\pi}{cT}(x_1 - x_0) = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_0).$$

A quelle condition les vibrations en deux points d'abscisses x_0 et x_1 sont-elles en phase ? Cela signifie que $\varphi(x_0) - \varphi(x_1) = m \times 2\pi$ où m est un entier relatif, soit $\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_0) = m \times 2\pi$, soit :

$$x_1 - x_0 = m \times \lambda.$$

De même, les vibrations en ces deux points sont en opposition de phase si $\varphi(x_0) - \varphi(x_1) = \pi + m \times 2\pi$ où m est un entier relatif, soit si :

$$x_1 - x_0 = \left(m + \frac{1}{2}\right) \times \lambda.$$

Deux points en lesquels l'onde est **en phase** sont séparés le long de la direction de propagation (Ox) d'un **nombre entier de fois la longueur d'onde**.

Deux points en lesquels l'onde est **en opposition de phase** sont séparés le long de la direction de propagation (Ox) d'un **nombre entier de fois la longueur d'onde plus une demi-longueur d'onde**.

Ces résultats sont mis à profit dans l'expérience suivante pour mesurer la célérité d'ondes ultra-sonores dans l'air.

Expérience

On place un émetteur d'ultrasons E , produisant une onde sinusoïdale de fréquence $f = 44,0$ kHz, devant deux récepteurs R_1 et R_2 fournissant des signaux (tensions électriques) proportionnels au signal de l'onde qu'ils reçoivent et que l'on envoie sur les deux voies d'un oscilloscope.

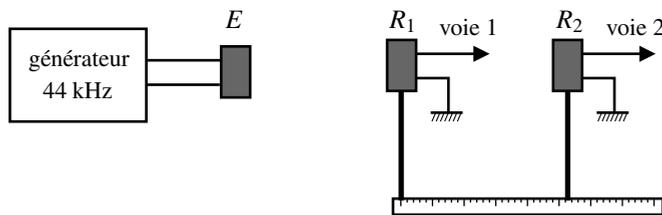


Figure 2.15 – Mesure de la célérité des ondes ultrasonores dans l'air.

En « mode normal », on voit à l'écran de l'oscilloscope deux sinusoïdes d'amplitudes à peu près égales si les récepteurs sont à peu près à la même distance de l'émetteur. Si l'on passe l'oscilloscope en « mode XY », on voit (en général) une ellipse. Lorsque le déphasage des deux signaux varie, cette ellipse se transforme en un segment de droite de pente positive si les deux signaux sont en phase, et en un segment de droite de pente négative si les deux signaux sont en opposition de phase (voir chapitre précédent).

R_1 est fixe. R_2 peut être translaté le long d'une règle graduée, parallèle à la direction entre l'émetteur et ce récepteur. On commence par ajuster sa position pour voir deux signaux en phase, c'est-à-dire, sur l'oscilloscope, un segment de droite de pente positive. Puis on le recule progressivement en observant l'écran de l'oscilloscope : on voit que les signaux sont alternativement en opposition de phase et en phase. Quand les signaux sont pour la 5^{ème} fois de suite en phase on note la position du récepteur mobile sur la règle, puis on continue. Lors d'un essai, on a noté les positions successives, en centimètres : 42,0 ; 37,9 ; 33,9 ; 29,9 ; 26,0. La règle étant graduée en millimètre l'incertitude sur chacune de ces valeurs est de 0,3 mm.

La distance moyenne entre deux positions successives de la liste précédente est : $\frac{42,0 - 26,0}{4} = 4,0 \text{ cm} \pm 0,15 \text{ mm}$. On en déduit une évaluation de la longueur d'onde :

$\lambda = \frac{4,0}{5} = 0,80 \text{ cm} = 8,0 \text{ mm} \pm 0,03 \text{ mm}$, puis de la célérité des ondes ultra-sonores dans l'air :

$$c = \lambda f = 352 \pm 2 \text{ m.s}^{-1}.$$

SYNTHÈSE

SAVOIRS

- connaître les grands types d'onde et la nature du signal propagé
- notion de spectre
- composition du spectre d'un signal périodique non sinusoïdal
- domaine fréquentiel des ondes sonores
- formes mathématiques d'une onde progressive
- formes mathématiques d'une onde progressive sinusoïdale (ou harmonique)
- relations entre ω et k , entre λ et T
- évolution de la phase d'une onde progressive sinusoïdale dans l'espace

SAVOIR-FAIRE

- obtenir expérimentalement le spectre d'un signal
- écrire une onde progressive de forme quelconque
- écrire une onde progressive sinusoïdale quelconque
- calculer les grandeurs relatives à la périodicité de l'onde à partir de l'une d'entre elles
- calculer le déphasage d'une onde entre deux points
- mesurer expérimentalement la célérité d'une onde
- mesurer expérimentalement une longueur d'onde

MOTS-CLÉS

- | | | |
|--------------------------|--------------------|--------------------|
| • onde | • harmoniques | • onde sinusoïdale |
| • signal physique | • son | • vecteur d'onde |
| • spectre | • propagation | • longueur d'onde |
| • composante sinusoïdale | • célérité | • déphasage |
| • fondamental | • onde progressive | |